

# 长沙市 2023 年新高考适应性考试

## 数 学

### 注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 请保持答题卡的整洁。考试结束后，将本试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z$  满足  $z(1-i) = 3+i$ ，则  $|z| =$   
A.  $\sqrt{10}$                       B.  $\sqrt{5}$                       C. 2                      D.  $\sqrt{2}$
2. 设集合  $A = \{(x, y) | y = x\}$ ， $B = \{(x, y) | y = x^3\}$ ，则  $A \cap B$  的元素个数是  
A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4
3. 已知  $a = \log_2 1.8$ ， $b = \log_4 3.6$ ， $c = \frac{1}{2}$ ，则  
A.  $a > b > c$                       B.  $a > c > b$                       C.  $b > a > c$                       D.  $b > c > a$
4.  $(\frac{1}{x} - 2)(1 - 2x)^4$  的展开式中，常数项为  
A. -4                      B. -6                      C. -8                      D. -10
5. 在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，已知  $AB = 4$ ， $AD = 3$ ， $AA_1 = 5$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 60^\circ$ ，则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD_1}$  的值为  
A. 10.5                      B. 12.5                      C. 22.5                      D. 42.5
6. 若  $\frac{1 - \tan(\alpha - \frac{\pi}{4})}{1 + \tan(\alpha - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}$ ，则  $\cos 2\alpha$  的值为  
A.  $-\frac{3}{5}$                       B.  $\frac{3}{5}$                       C.  $-\frac{4}{5}$                       D.  $\frac{4}{5}$

7. 斐波那契数列  $\{F_n\}$ ，因数学家莱昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”，该数列  $\{F_n\}$  满足  $F_1 = F_2 = 1$ ，且  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 。卢卡斯数列  $\{L_n\}$  是以数学家爱德华·卢卡斯命名，与斐波那契数列联系紧密，即  $L_1 = 1$ ，且  $L_{n+1} = F_n + F_{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则  $F_{2023} =$

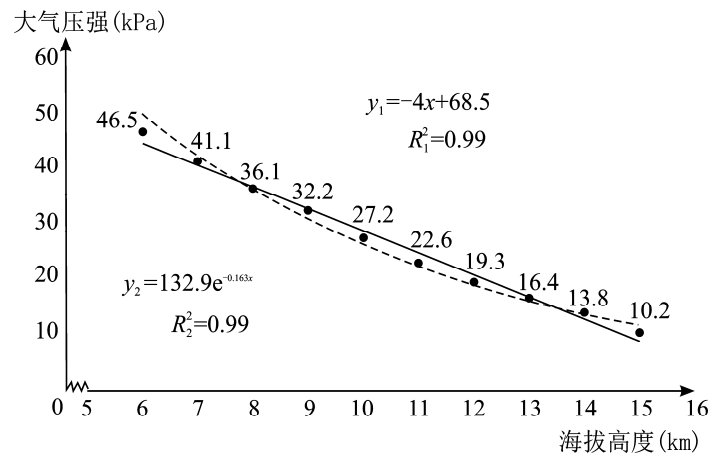
- A.  $\frac{1}{3}L_{2022} + \frac{1}{6}L_{2024}$                       B.  $\frac{1}{3}L_{2022} + \frac{1}{7}L_{2024}$   
C.  $\frac{1}{5}L_{2022} + \frac{1}{5}L_{2024}$                       D.  $-\frac{1}{5}L_{2022} + \frac{2}{5}L_{2024}$

8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，已知  $A(3,0)$ ， $B(0,t)$  ( $t > 0$ )，若该平面中不存在点  $P$ ，同时满足两个条件  $|PA|^2 + 2|PO|^2 = 12$  与  $|PO| = \sqrt{2}|PB|$ ，则  $t$  的取值范围是

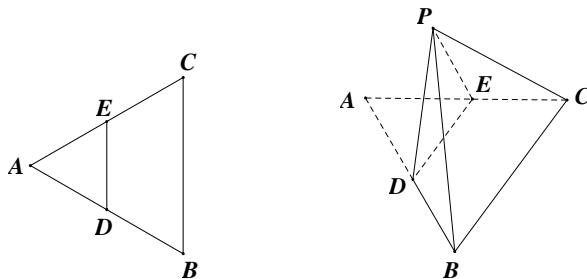
- A.  $(0, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1)$                       B.  $(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1, +\infty)$   
C.  $(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1, \frac{\sqrt{6}}{2} + 1)$                       D.  $(0, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1) \cup (\frac{\sqrt{6}}{2} + 1, +\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知双曲线的方程为  $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{16} = 1$ ，则
- A. 渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{2}x$                       B. 焦距为  $8\sqrt{5}$   
C. 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$                       D. 焦点到渐近线的距离为 8
10. 自然环境中，大气压受到各种因素的影响，如温度、湿度、风速和海拔等方面的改变，都将导致大气压发生相应的变化，其中以海拔的影响最为显著。下图是根据一组观测数据得到海拔 6 千米 ~ 15 千米的大气压强散点图，根据一元线性回归模型得到经验回归方程为  $y_1 = -4.0x + 68.5$ ，决定系数为  $R_1^2 = 0.99$ ；根据非线性回归模型得到经验回归方程为  $y_2 = 132.9e^{-0.163x}$ ，决定系数为  $R_2^2 = 0.99$ ，则下列说法正确的是



- A. 由散点图可知，大气压强与海拔高度负相关
- B. 由方程  $y_1 = -4.0x + 68.5$  可知，海拔每升高 1 千米，大气压强必定降低 4.0kPa
- C. 由方程  $y_1 = -4.0x + 68.5$  可知，样本点 (11, 22.6) 的残差为 -1.9
- D. 对比两个回归模型，结合实际情况，方程  $y_2 = 132.9e^{-0.163x}$  的预报效果更好
11. 已知函数  $y = \frac{x+1}{x-1}$  与  $y = e^x$  相交于  $A, B$  两点，与  $y = \ln x$  相交于  $C, D$  两点，若  $A, B, C, D$  四点的横坐标分别为  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ，且  $x_1 < x_2, x_3 < x_4$ ，则
- A.  $x_1 + x_2 = 0$       B.  $x_3 x_4 = 1$       C.  $x_1 \ln x_3 = 1$       D.  $x_4 e^{x_1} = 1$
12. 如图，已知  $\triangle ABC$  是边长为 4 的等边三角形， $D, E$  分别是  $AB, AC$  的中点，将  $\triangle ADE$  沿着  $DE$  翻折，使点  $A$  到点  $P$  处，得到四棱锥  $P-BCED$ ，则



- A. 翻折过程中，该四棱锥的体积有最大值为 3
- B. 存在某个点  $P$  位置，满足平面  $PDE \perp$  平面  $PBC$
- C. 当  $PB \perp PC$  时，直线  $PB$  与平面  $BCED$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- D. 当  $PB = \sqrt{10}$  时，该四棱锥的五个顶点所在球的表面积为  $\frac{52}{3}\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ， $\mathbf{b} = (2, -2)$ ， $\mathbf{c} = (1, \lambda)$ ，若  $\mathbf{c} \perp (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ ，则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ )，若函数  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{\pi}{6}, 0)$  中心对称，且关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  轴对称，则  $\omega$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 已知  $O$  为坐标原点， $F$  为抛物线  $y^2 = 2px$  的焦点，过点  $F$  作倾斜角为  $60^\circ$  的直线与抛物线交于  $A$ ， $B$  两点（其中点  $A$  在第一象限）. 若直线  $AO$  与抛物线的准线  $l$  交于点  $D$ ，设  $\triangle AOF$ ， $\triangle ADB$  的面积分别为  $S_1$ ， $S_2$ ，则  $\frac{S_1}{S_2} =$ \_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ ，若关于  $x$  的方程  $f(f(x)) = a$  恰有两个不相等的实根  $x_1$ ， $x_2$ ，且  $x_1 < x_2$ ，则  $\frac{x_2+1}{x_1+2}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本题满分 10 分）已知数列  $\{a_n\}$  为等差数列，数列  $\{b_n\}$  为等比数列，满足

$$b_1 = 2a_1 = 2, \quad b_2 = 2^{a_2}, \quad a_3 + b_3 = 11.$$

（1）求数列  $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$  的通项公式；

（2）求数列  $\{a_n \cdot b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

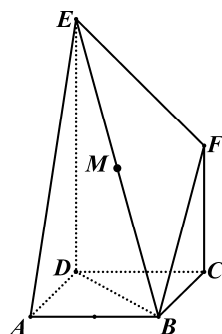
18. （本题满分 12 分）在锐角  $\triangle ABC$  中，角  $A$ ， $B$ ， $C$  所对应的边分别为  $a$ ， $b$ ， $c$ ，

$$\text{已知 } \frac{\sin A - \sin B}{\sqrt{3}a - c} = \frac{\sin C}{a + b}.$$

（1）求角  $B$  的值；

（2）若  $a = 2$ ，求  $\triangle ABC$  的周长的取值范围.

19. (本题满分 12 分) 如图, 在以  $A, B, C, D, E, F$  为顶点的六面体中 (其中  $F \in$  平面  $EDC$ ), 四边形  $ABCD$  是正方形,  $ED \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BF = FE$ , 且平面  $FEB \perp$  平面  $EDB$ .



- (1) 设  $M$  为棱  $EB$  的中点, 证明:  $A, C, F, M$  四点共面;
- (2) 若  $ED = 2AB = 2$ , 求平面  $FEB$  与平面  $EAB$  的夹角的余弦值.
20. (本题满分 12 分) 为了调动大家积极学习党的二十大精神, 某市举办了党史知识的竞赛. 初赛采用“两轮制”方式进行, 要求每个单位派出两个小组, 且每个小组都要参加两轮比赛, 两轮比赛都通过的小组才具备参与决赛的资格. 某单位派出甲、乙两个小组参赛, 在初赛中, 若甲小组通过第一轮与第二轮比赛的概率分别是  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$ , 乙小组通过第一轮与第二轮比赛的概率分别是  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{2}{3}$ , 且各个小组所有轮次比赛的结果互不影响.
- (1) 若该单位获得决赛资格的小组个数为  $X$ , 求  $X$  的数学期望;
- (2) 已知甲、乙两个小组都获得了决赛资格, 决赛以抢答题形式进行. 假设这两组在决赛中对每个问题回答正确的概率恰好是各自获得决赛资格的概率. 若最后一道题被该单位的某小组抢到, 且甲、乙两个小组抢到该题的可能性分别是 45%, 55%, 该题如果被答对, 计算恰好是甲小组答对的概率.

21. (本题满分 12 分) 设  $A, B$  是椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  上异于  $P(0,1)$  的两点, 且直线  $AB$  经过坐标原点, 直线  $PA, PB$  分别交直线  $y = -x + 2$  于  $C, D$  两点.
- (1) 求证: 直线  $PA, AB, PB$  的斜率成等差数列;
- (2) 求  $\triangle PCD$  面积的最小值.

22. (本题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = (2x^2 - x^3)e^{1-x}$ , 其中  $x > 0$ .
- (1) 求  $f(x)$  的最大值;
- (2) 若不等式  $ax^2e^{1-x} + |\ln x| \geq a$  对于任意的  $x \in (0, +\infty)$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

# 长沙市 2023 年新高考适应性考试

## 数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 【答案】B

解析：由  $z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+2i$ ，可得  $|z| = \sqrt{5}$ 。

2. 【答案】C

解析：联立  $\begin{cases} y=x \\ y=x^3 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ，或  $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ ，或  $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ ，

即  $A \cap B = \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\}$ ，共有 3 个元素。

3. 【答案】C

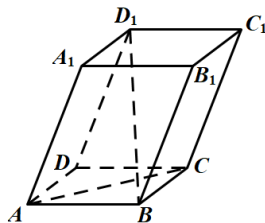
解析：由  $\frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{2} < \log_2 1.8 = \log_2 \sqrt{3.24} < \log_2 \sqrt{3.6} = \log_4 3.6$ ，可得  $c < a < b$ 。

4. 【答案】D

解析： $(1-2x)^4$  的展开式的通项为  $T_{k+1} = C_4^k (-2x)^k = (-2)^k C_4^k x^k$ ，则  $(\frac{1}{x}-2)(1-2x)^4$  的展开式中的常数项为  $(-2)^1 C_4^1 - 2 \times (-2)^0 C_4^0 = -10$ 。

5. 【答案】A

解析：观察图象，可知  $\overrightarrow{BD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ，



则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD_1} = -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} = -16 + 10 + 9 + 7.5 = 10.5$ 。

6. 【答案】A

解析：由  $\frac{1 - \tan(\alpha - \frac{\pi}{4})}{1 + \tan(\alpha - \frac{\pi}{4})} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan(\alpha - \frac{\pi}{4})}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan(\alpha - \frac{\pi}{4})} = \tan(\frac{\pi}{4} - (\alpha - \frac{\pi}{4})) = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$ ，

可得  $\tan \alpha = 2$ ，则  $\cos 2\alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$ 。

7. 【答案】C

解析：由  $\begin{cases} L_{2022} = F_{2021} + F_{2023} = 2F_{2023} - F_{2022} \\ L_{2024} = F_{2023} + F_{2025} = 2F_{2023} + F_{2024} = 3F_{2023} + F_{2022} \end{cases}$ ，解得  $F_{2023} = \frac{1}{5}L_{2022} + \frac{1}{5}L_{2024}$ 。

8. 【答案】D

解析：设点  $P$  坐标为  $(x, y)$ ，由  $|PA|^2 + 2|PO|^2 = 12$ ，可得  $(x-3)^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2) = 12$ ，化简得  $(x-1)^2 + y^2 = 2$ ，即点  $P$  的轨迹为以  $(1, 0)$  为圆心， $\sqrt{2}$  为半径的圆；

又由  $|PO| = \sqrt{2}|PB|$ ，可得  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + (y-t)^2}$ ，化简得  $x^2 + (y-2t)^2 = 2t^2$ ，

即点  $P$  的轨迹为以  $(0, 2t)$  为圆心， $\sqrt{2}t$  为半径的圆。

由题意，结合图形可知，两圆外离或内含。

当两圆外离时， $\sqrt{1+4t^2} > \sqrt{2}t + \sqrt{2}$ ，解得  $t > \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$ ；

当两圆内含时， $\sqrt{1+4t^2} < |\sqrt{2}t - \sqrt{2}|$ ，解得  $0 < t < \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$ 。

综上，可知  $t$  的取值范围是  $(0, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1) \cup (\frac{\sqrt{6}}{2} + 1, +\infty)$ 。

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 【答案】BC

解析：易知  $a = 8$ ， $b = 4$ ， $c = 4\sqrt{5}$ ，则渐近线方程为  $y = \pm 2x$ ，即 A 错误；

焦距为  $2c = 8\sqrt{5}$ ，即 B 正确；离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，即 C 正确；

可求得焦点到渐近线的距离  $d = 4$ ，即 D 错误。

10. 【答案】ACD

解析：观察散点图，便知大气压强与海拔高度负相关，即 A 正确。



通过经验回归方程  $y_1 = -4.0x + 68.5$ ，可知海拔每升高 1 千米，大气压强降低约为 4.0kPa，即 B 错误；

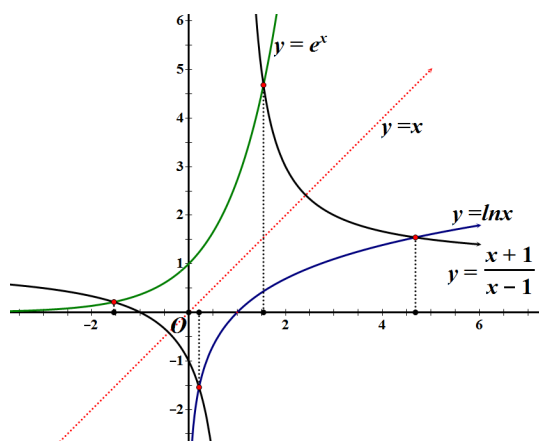
当  $x=11$  时，代入方程计算可得预测值  $\hat{y} = 24.5$ ，则残差  $\hat{e} = 22.6 - \hat{y} = -1.9$ ，即 C 正确。

随着海拔高度的增加，大气压强越来越小，但不可能为负数，因此，选择方程  $y_2 = 132.9e^{-0.163x}$  更合适，即 D 正确。

11. 【答案】ABD

解析：对于 A 选项，由函数  $y = e^x$  与  $y = \frac{x+1}{x-1}$  满足性质  $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ ，则  $x_1$  与  $-x_1$  都为函数  $y = e^x - \frac{x+1}{x-1}$  的零点，有  $x_2 = -x_1$ ，即 A 正确；

对于 B 选项，由函数  $y = \ln x$  与  $y = \frac{x+1}{x-1}$  都满足性质  $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ ，则  $x_3$  与  $\frac{1}{x_3}$  都为函数  $y = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$  的零点，有  $x_4 = \frac{1}{x_3}$ ，即 B 正确；



对于 C 选项，如图，由函数  $y = e^x$  与  $y = \ln x$  关于直线  $y = x$  对称，可得  $x_1 = \ln x_3$ ，有  $\frac{\ln x_3}{x_1} = 1$ ，即 C 错误；

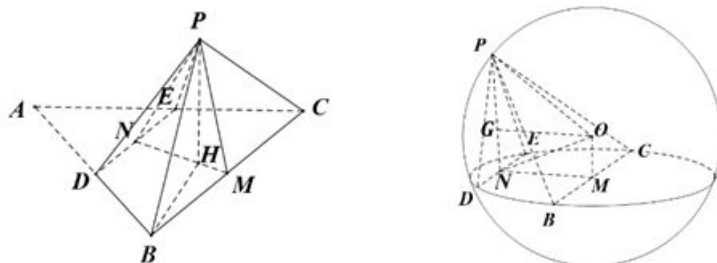
对于 D 选项，同上，由  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = \ln x_4 \end{cases}$ ，可得  $x_1 + \ln x_4 = 0$ ，

有  $x_4 e^{x_1} = 1$ ，即 D 正确。

12. 【答案】ACD

解析：对于 A 选项，当平面  $PDE \perp$  平面  $BCED$  时，四棱锥  $P-BCED$  的体积最大，此时

体积  $V = \frac{1}{3} \times \frac{(2+4) \times \sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = 3$ ，即 A 正确.



如上左图，设  $M, N$  分别为  $BC, DE$  的中点，

对于 B 选项，设平面  $PDE \cap$  平面  $PBC = l$ ，则  $l \parallel BC$ ，有  $l \perp MN$ ， $l \perp PM$ ，可得  $l \perp$  平面  $PMN$ ，即  $\angle NPM$  为平面  $PDE$  与平面  $PBC$  所成的二面角，由  $PN = NM$  可知， $\angle NPM \neq 90^\circ$ ，即 B 错误.

对于 C 选项，过  $P$  作  $MN$  的垂线，垂足为  $H$ ，则  $PH \perp$  平面  $BCED$ ，则  $\angle PBH$  为直线  $PB$  与平面  $BCED$  的所成角. 依题意可知， $PB = PC = 2\sqrt{2}$ ， $PM = 2$ ， $PN = NM = \sqrt{3}$ ，在  $\triangle PMN$  中，由余弦定理可得  $\cos \angle PMN = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，有  $\sin \angle PMN = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ；在  $\triangle PMH$  中， $PH = PM \sin \angle PMN = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ，从而直线  $PB$  与平面  $BCED$  所成角的正弦值为  $\frac{PH}{PB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 C 正确.

对于 D 选项，当  $PB = \sqrt{10}$  时，由  $BN = \sqrt{7}$ ，可知  $PN^2 + BN^2 = PB^2$ ，即  $PN \perp BN$ ，又  $PN \perp DE$ ，且  $BN \cap DE = N$ ，则  $PN \perp$  平面  $BCED$ ，又  $PN \subset$  平面  $PDE$ ，则平面  $PDE \perp$  平面  $BCED$ . 设四棱锥  $P-BCED$  的外接球球心为  $O$ ， $\triangle PDE$  的外心为  $G$ ，如上右图，易知点  $M$  为等腰梯形  $BCED$  的外心，则四边形  $OGNM$  为矩形，且  $OM = GN = \frac{1}{3}PN = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，可得  $R^2 = OB^2 = OM^2 + MB^2 = \frac{13}{3}$ ，从而所求外接球的表面积为  $\frac{52}{3}\pi$ ，即 D 正确.

三. 填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 【答案】  $\frac{5}{2}$

解析：由  $\vec{a} + 2\vec{b} = (5, -2)$ ，可得  $\vec{c} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 5 - 2\lambda = 0$ ，解得  $\lambda = \frac{5}{2}$ .

14. 【答案】 3

解析：依题意， $f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin(\frac{\pi}{6}\omega + \varphi) = 0$ ，解得 $\frac{\pi}{6}\omega + \varphi = k_1\pi, k_1 \in Z$  ①；

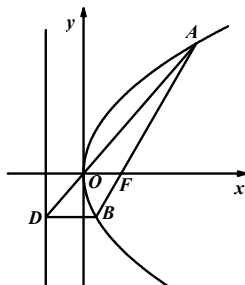
$$f(\frac{\pi}{3}) = 2\sin(\frac{\pi}{3}\omega + \varphi) = \pm 1, \text{ 解得 } \frac{\pi}{3}\omega + \varphi = \frac{\pi}{2} + k_2\pi, k_2 \in Z \text{ ②}.$$

将①②式两边同时相减，解得 $\omega = 3 + 6(k_2 - k_1), k_1 \in Z, k_2 \in Z$ ，当 $k_1 = k_2$ 时， $\omega$ 取最小值为3.

15. 【答案】 $\frac{9}{16}$

解析：如图，根据抛物线的定义， $|AF| = x_A + \frac{p}{2}$ ，而 $x_A = \frac{p}{2} + |AF|\cos 60^\circ$ ，

$$\text{则 } |AF| = \frac{p}{1 - \cos 60^\circ} = 2p, \quad x_A = \frac{3p}{2}. \quad \text{同理 } |BF| = \frac{p}{1 + \cos 60^\circ} = \frac{2p}{3}, \quad x_B = \frac{p}{6}.$$



法 1：由 $\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{3}{4}$ ，且 $\frac{|AO|}{|AD|} = \frac{x_A}{x_A - x_D} = \frac{3}{4}$ ，即 $\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AO|}{|AD|}$ ，可得 $OF \parallel BD$ ，

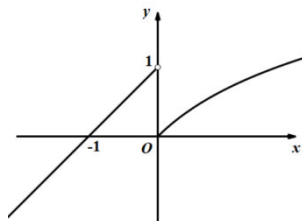
$$\text{则 } \triangle AOF \sim \triangle ADB, \text{ 从而 } \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{|AF|}{|AB|}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

法 2：求得 $y_A = \sqrt{3}p$ ， $y_B = y_D = -\frac{\sqrt{3}}{3}p$ ，则 $S_1 = \frac{1}{2}|OF| \cdot y_A = \frac{\sqrt{3}}{4}p^2$ ，

$$S_2 = \frac{1}{2}|DB| \cdot (y_A - y_B) = \frac{4\sqrt{3}}{9}p^2, \text{ 可得 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{16}.$$

16. 【答案】 $[\frac{e}{\ln 2}, e^{e-1})$

解析 法 1：令 $t = f(x)$ ，画出函数 $f(x)$ 的图象，由 $f(t) = a$ ，可知：



当  $a < 0$  时, 方程  $f(t) = a$  只有一个实根  $t = a - 1 < -1$ , 则方程  $f(x) = t$  也只有一个实根, 不合题意.

当  $a = 0$  时, 方程  $f(t) = a$  有两个实根,  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 0$ , 则方程  $f(x) = t_1$  有一个实根, 方程  $f(x) = t_2$  有两个实根, 不合题意.

当  $0 < a < \ln 2$  时, 方程  $f(t) = a$  有两个实根,  $t_1 = a - 1 < 0$ ,  $t_2 = e^a - 1 \in (0, 1)$ ,

则方程  $f(x) = t_1$  有一个实根, 方程  $f(x) = t_2$  有两个实根, 不合题意.

当  $\ln 2 \leq a < 1$  时, 方程  $f(t) = a$  有两个实根,  $t_1 = a - 1 \in [\ln 2 - 1, 0)$ ,  $t_2 = e^a - 1 \in [1, e - 1)$ , 则方程  $f(x) = t_1$  有一个实根  $x_1$ , 方程  $f(x) = t_2$  有一个实根  $x_2$ ,

符合题意. 此时,  $x_1 + 2 = t_1 = a$ ,  $\ln(x_2 + 1) = e^a - 1$ ,

有  $\ln\left(\frac{x_2 + 1}{x_1 + 2}\right) = \ln(x_2 + 1) - \ln(x_1 + 2) = e^a - \ln a - 1$ .

设  $g(a) = e^a - \ln a - 1$ , 则  $g'(a) = e^a - \frac{1}{a}$ . 由  $g'(a)$  单调递增, 可得

$g'(a) \geq g'(\ln 2) = 2 - \frac{1}{\ln 2} > 0$ , 则  $g(a)$  单调递增, 有  $g(a) \in [1 - \ln(\ln 2), e - 1)$ ,

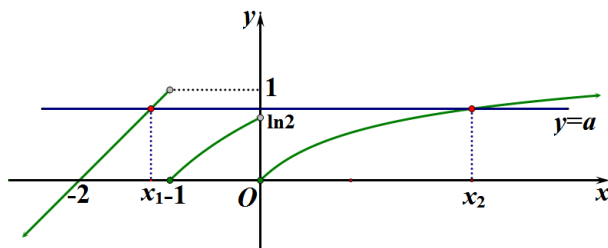
即  $\frac{x_2 + 1}{x_1 + 2} \in \left[\frac{e}{\ln 2}, e^{e-1}\right)$ .

当  $a \geq 1$  时, 方程  $f(t) = a$  有一个实根  $t = e^a - 1 \geq e - 1 > 1$ , 方程  $f(x) = t$  只有一个实根, 不合题意.

综上所述,  $\frac{x_2 + 1}{x_1 + 2} \in \left[\frac{e}{\ln 2}, e^{e-1}\right)$ .

**法 2:** 设  $g(x) = f(f(x))$ , 则  $g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ \ln(x + 2), & -1 \leq x < 0 \\ \ln(\ln(x + 1) + 1), & x \geq 0 \end{cases}$ , 作出图象如下, 易知

$a \in [\ln 2, 1)$ .



由  $x_1 + 2 = a$ ,  $\ln(\ln(x_2 + 1) + 1) = a$ , 即  $x_2 + 1 = e^{e^a - 1}$ , 可得  $\frac{x_2 + 1}{x_1 + 2} = \frac{e^{e^a - 1}}{a}$ .

设  $\varphi(a) = \frac{e^{e^a - 1}}{a}$ ,  $a \in [\ln 2, 1)$ , 则  $\varphi'(a) = \frac{e^{e^a - 1}(ae^a - 1)}{a^2} > 0$ , 可得函数  $\varphi(a)$  单调递增, 有

$\varphi(a) \in [\frac{e}{\ln 2}, e^{e-1})$ , 即  $\frac{x_2 + 1}{x_1 + 2} \in [\frac{e}{\ln 2}, e^{e-1})$ .

四. 解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

解析 (1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ ,

依题意可知  $a_1 = 1, b_1 = 2$ , 且  $\begin{cases} 2q = 2^{d+1} \\ 1 + 2d + 2q^2 = 11 \end{cases}$ , 消去  $q$  化简得  $d + 4^d = 5$ .

又函数  $f(x) = x + 4^x$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递增的函数, 且  $f(1) = 5$ , 则  $d = 1$ ,  $q = 2$ .

因此,  $a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$ ,  $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ . .....5 分

(2) 依题意,  $S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \cdots + n \times 2^n$  ①,

两边同时乘以公比 2, 得  $2S_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1}$  ②,

将①, ②两边同时相减得

$$-S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \times 2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2,$$

故  $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ . .....10 分

18. (本题满分 12 分)

解析 (1) 由正弦定理, 可得  $\frac{a-b}{\sqrt{3}a-c} = \frac{c}{a+b}$ , 整理得  $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3}ac$ . 由余弦定理,

可得  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得  $B = \frac{\pi}{6}$ . .....5 分

(2) 法 1: 由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ , 即  $\frac{2}{\sin A} = \frac{b}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{c}{\sin C}$ , 可得  $b = \frac{1}{\sin A}$ ,

$$c = \frac{2 \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin(\frac{5\pi}{6} - A)}{\sin A} = \frac{\sqrt{3} \sin A + \cos A}{\sin A} = \sqrt{3} + \frac{\cos A}{\sin A},$$

$$\text{则 } b+c = \sqrt{3} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = \sqrt{3} + \frac{2\cos^2 \frac{A}{2}}{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \sqrt{3} + \frac{1}{\tan \frac{A}{2}}.$$

在锐角  $\triangle ABC$  中, 由  $\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C = \frac{5\pi}{6} - A < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ , 解得  $\frac{\pi}{3} < A < \frac{\pi}{2}$ , 即  $\frac{\pi}{6} < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{4}$ .

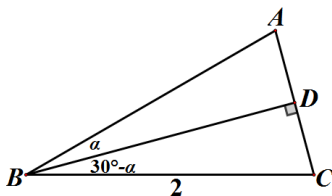
又函数  $y = \tan x$  在  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$  上单调递增, 则  $\tan \frac{A}{2} \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ , 可得  $b+c \in (\sqrt{3}+1, 2\sqrt{3})$ ,

故  $\triangle ABC$  的周长的取值范围  $(\sqrt{3}+3, 2\sqrt{3}+2)$ . .....12 分

法 2: 过点  $B$  作  $BD \perp AC$  于点  $D$ , 设  $\angle ABD = \alpha$ , 则  $\angle CBD = 30^\circ - \alpha$ .

在  $\text{Rt}\triangle BCD$  中,  $BD = 2 \cos(30^\circ - \alpha)$ ,  $CD = 2 \sin(30^\circ - \alpha)$ ; 在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中,

$$AB = \frac{BD}{\cos \angle ABD} = \frac{2 \cos(30^\circ - \alpha)}{\cos \alpha}, \quad AD = BD \cdot \tan \angle ABD = 2 \cos(30^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha.$$

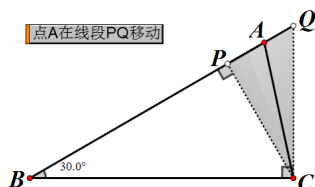


从而,

$$\begin{aligned} b+c &= 2 \sin(30^\circ - \alpha) + 2 \cos(30^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha + \frac{2 \cos(30^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos(30^\circ - \alpha) + 2 \sin 30^\circ}{\cos \alpha} \\ &= \frac{2 \cos(30^\circ - \alpha) + 2 \sin 30^\circ}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha + 1}{\cos \alpha} = \sqrt{3} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{3} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= \sqrt{3} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} + \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} + \frac{\tan 45^\circ + \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan 45^\circ - \tan \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} + \tan(45^\circ + \frac{\alpha}{2}). \end{aligned}$$

又  $0 < \alpha < 30^\circ$ , 则  $45^\circ < 45^\circ + \frac{\alpha}{2} < 60^\circ$ , 可得  $b+c \in (\sqrt{3}+1, 2\sqrt{3})$ , 故  $\triangle ABC$  的周长的取值范围  $(\sqrt{3}+3, 2\sqrt{3}+2)$ .

**法 3:** 如图所示, 点  $A$  从点  $P$  移向点  $Q$  时,  $b+c$  单调递增, 且  $b+c \in (\sqrt{3}+1, 2\sqrt{3})$ ,

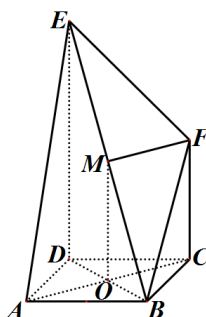


故  $\triangle ABC$  的周长的取值范围  $(\sqrt{3}+3, 2\sqrt{3}+2)$ .

19. (本题满分 12 分)

**解析** (1) 证明: 连接  $AC$ , 与  $BD$  交于点  $O$ , 则  $AC \perp BD$ .

又  $ED \perp$  平面  $ABCD$ , 则  $ED \perp AC$ , 且  $ED \cap BD = D$ , 可得  $AC \perp$  平面  $EDB$ .



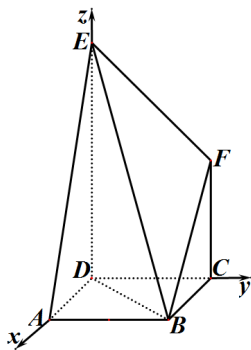
连接  $FM$ , 由  $BF = FE$ , 可知  $FM \perp EB$ . 又平面  $FEB \perp$  平面  $EDB$ , 且平面  $FEB \cap$  平面  $EDB = EB$ , 则  $FM \perp$  平面  $EDB$ , 从而  $FM \parallel AC$ , 即  $A, C, F, M$  四点共面.

.....5 分

(2) 连接  $OM$ , 注意到  $OM$  为  $\triangle EDB$  的中位线, 有  $OM \parallel ED$ , 且  $OM \subset$  平面  $OCFM$ , 则  $ED \parallel$  平面  $OCFM$ , 又平面  $DCFE \cap$  平面  $OCFM = FC$ , 则  $ED \parallel FC$ . 结合

(1) 中的  $FM \parallel AC$ , 可知四边形  $OCFM$  为矩形, 则  $FC = OM = \frac{1}{2}ED = 1$ .

**法 1:** 如下图, 以  $D$  为坐标原点,  $DA, DC, DE$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴, 建立空间直角坐标系, 则  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $F(0, 1, 1)$ ,  $E(0, 0, 2)$ , 有  $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{BE} = (-1, -1, 2)$ ,  $\overrightarrow{BF} = (-1, 0, 1)$ .



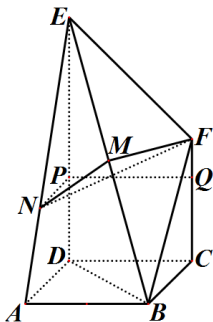
其中一个法向量  $\vec{m} = (1, 1, 1)$ ;

得其中一个法向量  $\vec{n} = (2, 0, 1)$ .

从而  $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ ,

即平面  $FEB$  与平面  $EAB$  的夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . .....12 分

**法 2:** 如下图, 在平面  $EAB$  中, 过点  $M$  作  $EB$  的垂线与  $EA$  相交于点  $N$ , 则  $\angle NMF$  为二面角  $F-EB-A$  的平面角.



由  $\triangle ENM \sim \triangle EBA$ , 可得  $\frac{EN}{EB} = \frac{NM}{BA} = \frac{ME}{AE}$ . 又  $BA=1$ ,  $EB=\sqrt{6}$ ,  $ME=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ,  $AE=\sqrt{5}$ , 解得  $EN=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ,  $MN=\frac{\sqrt{30}}{10}$ .

过点  $N$  作  $NP \perp ED$  于点  $P$ ，过点  $P$  作  $PQ \perp FC$  于点  $Q$ ，



可求得  $NP = \frac{3}{5}$ ,  $PQ = 1$ ,  $QF = \frac{1}{5}$ , 则  $NF^2 = NP^2 + PQ^2 + QF^2 = \frac{7}{5}$ .

又  $MF = \sqrt{BF^2 - BM^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 在  $\triangle NMF$  中, 由余弦定理可求得

$$\cos \angle NMF = \frac{MN^2 + MF^2 - NF^2}{2MN \cdot MF} = -\frac{\sqrt{15}}{5},$$

即平面  $FEB$  与平面  $EAB$  的夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ . .....12 分

20. (本题满分 12 分)

解析 (1) 由题意可知, 甲组获得决赛资格的的概率为  $p_1 = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ ,

乙组获得决赛资格的的概率为  $p_2 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$ .

$X$  的可能取值为 0, 1, 2, 则  $P(X=0) = (1-p_1)(1-p_2) = (1-\frac{3}{5}) \times (1-\frac{2}{5}) = \frac{6}{25}$ ,

$$P(X=1) = (1-p_1) \cdot p_2 + p_1 \cdot (1-p_2) = (1-\frac{3}{5}) \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times (1-\frac{2}{5}) = \frac{13}{25}, \quad P(X=2) = p_1 \cdot p_2 = \frac{6}{25},$$

可得  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

$$E(X) = 0 \times \frac{6}{25} + 1 \times \frac{13}{25} + 2 \times \frac{6}{25} = 1. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 设  $B$  表示事件“该单位的某小组对最后一道题回答正确”,  $A_1$  表示事件“甲小组抢到最后一道题”,  $A_2$  表示事件“乙小组抢到最后一道题”,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{9}{20}, \quad P(A_2) = \frac{11}{20}, \quad P(B|A_1) = \frac{3}{5}, \quad P(B|A_2) = \frac{2}{5}.$$

$$\text{根据全概率公式, 可得 } P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{9}{20} \times \frac{3}{5} + \frac{11}{20} \times \frac{2}{5} = \frac{49}{100},$$

$$\text{从而 } P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{20} \times \frac{3}{5}}{\frac{49}{100}} = \frac{27}{49},$$

即该题是甲组答对的概率为  $\frac{27}{49}$ . .....12 分

备用：设  $A_1$  表示事件“甲小组抢到最后一道题”， $A_2$  表示事件“乙小组抢到最后一道题”， $B_1$  表示事件“甲小组对最后一道题回答正确”， $B_2$  表示事件“乙小组对最后一道题回答正确”， $B$  表示事件“该单位的某小组对最后一道题回答正确”，

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{9}{20}, P(A_2) = \frac{11}{20}, P(B_1) = \frac{3}{5}, P(B_2) = \frac{2}{5}.$$

$$\text{可得 } P(B) = P(A_1 B_1) + P(A_2 B_2) = P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) = \frac{9}{20} \times \frac{3}{5} + \frac{11}{20} \times \frac{2}{5} = \frac{49}{100},$$

$$\text{从而 } P(A_1 B_1 | B) = \frac{P(A_1 B_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 B_1)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B_1)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{20} \times \frac{3}{5}}{\frac{49}{100}} = \frac{27}{49},$$

即该题是甲组答对的概率为  $\frac{27}{49}$ . .....12 分

21. (本题满分 12 分)

解析 (1) 设直线  $AB: y = kx$ , 两点  $A, B$  的坐标分别为  $(x_A, y_A), (x_B, y_B)$ , 将直线  $AB$  与椭圆的方程联立, 可得  $(2k^2 + 1)x^2 - 2 = 0$ ,

$$\text{则 } x_A + x_B = 0, x_A x_B = -\frac{2}{2k^2 + 1}.$$

$$\text{从而 } k_{AP} + k_{BP} = \frac{y_A - 1}{x_A} + \frac{y_B - 1}{x_B} = \frac{kx_A - 1}{x_A} + \frac{kx_B - 1}{x_B} = \frac{2kx_A x_B - (x_A + x_B)}{x_A x_B} = 2k,$$

即直线  $PA, AB, PB$  的斜率成等差数列. ....5 分

(2) 法 1: 点  $P(0,1)$  到直线  $y = -x + 2$  的距离  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 为定值,

直线  $PA$  的方程为  $y = \frac{y_A - 1}{x_A}x + 1$ , 与直线方程  $y = -x + 2$  联立,

$$\text{可解得 } x_C = \frac{x_A}{x_A + y_A - 1} = \frac{x_A}{(k+1)x_A - 1}; \quad \text{同理可得 } x_D = \frac{x_B}{(k+1)x_B - 1},$$

$$|CD| = \sqrt{2} \left| \frac{x_A - x_B}{(k+1)^2 x_A x_B - (k+1)(x_A + x_B) + 1} \right| = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + \frac{1}{2}}}{\left|k + \frac{1}{4}\right|} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k^2 + \frac{1}{2}}{\left(k + \frac{1}{4}\right)^2}}.$$

$$\text{从而 } S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} |CD| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2 + \frac{1}{2}}{(k + \frac{1}{4})^2}}.$$

令  $t = k + \frac{1}{4}$ , 则  $k = t - \frac{1}{4}$ , 可得  $S_{\triangle PCD} = \frac{3}{8} \sqrt{(\frac{1}{t} - \frac{4}{9})^2 + \frac{128}{81}} \geq \frac{3}{8} \times \frac{8\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ , 当且仅当  $k = 2$  时取等号, 故  $\triangle PCD$  面积的最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ . .....12 分

**法 2:** 根据题意可知

$$k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{y_A - 1}{x_A} \cdot \frac{y_B - 1}{x_B} = \frac{y_A y_B - (y_A + y_B) + 1}{x_A x_B} = \frac{y_A(-y_A) - (y_A - y_A) + 1}{x_A(-x_A)} = \frac{y_A^2 - 1}{x_A^2} = \frac{y_A^2 - 1}{2 - 2y_A^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} y_C = -x_C + 2 \\ y_C = k_{AP} x_C + 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x_C = \frac{1}{1 + k_{AP}}; \quad \text{同理可得 } x_D = \frac{1}{1 + k_{BP}}.$$

直线  $y = -x + 2$  与  $y$  轴相交于点  $E(0, 2)$ , 则

$$\begin{aligned} S_{\triangle PCD} &= |S_{\triangle PED} - S_{\triangle PEC}| = \frac{1}{2} \cdot |PE| \cdot |x_C - x_D| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{1 + k_{AP}} - \frac{1}{1 + k_{BP}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{k_{BP} - k_{AP}}{k_{AP} k_{BP} + (k_{AP} + k_{BP}) + 1} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{(k_{AP} + k_{BP})^2 - 4k_{AP} k_{BP}}}{k_{AP} k_{BP} + (k_{AP} + k_{BP}) + 1} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{4k^2 - 4 \times (-\frac{1}{2})}}{-\frac{1}{2} + 2k + 1} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2 + \frac{1}{2}}{(k + \frac{1}{4})^2}}. \end{aligned}$$

后续过程, 类似于解法 1. ....12 分

22. (本题满分 12 分)

**解析** (1) 依题意,  $f'(x) = (4x - 3x^2 - 2x^2 + x^3)e^{1-x} = x(x-1)(x-4)e^{1-x}$ ,

则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  单调递增, 在  $(1, 4)$  单调递减, 在  $(4, +\infty)$  单调递增.

当  $x \geq 2$  时,  $f(x) \leq 0$  恒成立, 则  $f(x)$  的最大值为  $f(1) = 1$ . ....4 分

(2) 设  $g(x) = ax^2 e^{1-x} + |\ln x| - a$ , 其中  $x > 0$ .

**方法 1** (先对参数分类讨论, 再对自变量分段讨论)

当  $a = 0$  时,  $g(x) = |\ln x| \geq 0$ , 符合题意.

当  $a > 0$  时, 注意到  $g(1) = 0$ .

(i) 当  $0 < x < 1$  时,  $g(x) = ax^2 e^{1-x} - \ln x - a$ , 且

$$g'(x) = a(2x - x^2)e^{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{a}{x} \left[ f(x) - \frac{1}{a} \right]. \text{ 由 (1) 知, } f(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 单调递增, 且 } f(x) \in (0, 1).$$

若  $\frac{1}{a} \geq 1$ , 即  $0 < a \leq 1$  时,  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减, 有  $g(x) > g(1) = 0$ , 符合题意.

若  $0 < \frac{1}{a} < 1$ , 即  $a > 1$  时, 存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使得  $f(x_0) = \frac{1}{a}$ . 当  $x \in (x_0,1)$  时,  $f(x) > \frac{1}{a}$ , 且  $g'(x) > 0$ , 则  $g(x)$  单调递增, 可得  $g(x) < g(1) = 0$ , 不合题意.

因此, 当  $0 < x < 1$  时, 满足题意的  $a \in (0,1]$ .

(ii) 当  $x \geq 1$  时, 结合 (i), 只需证明  $a \in (0,1]$  时, 恒有  $g(x) \geq 0$ , 即  $ax^2e^{1-x} + \ln x - a \geq 0$ , 即  $a(x^2e^{1-x} - 1) + \ln x \geq 0$  (\*).

当  $x \geq e$  时,  $g(x) > \ln x - a \geq \ln x - 1 \geq 0$ ; 当  $1 \leq x < e$  时, 设  $h(x) = x^2e^{1-x} - 1$ , 则  $h'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ , 可得  $h(x)$  在  $(1,2)$  单调递增, 在  $(2,e)$  单调递减, 有  $h(x) > \min\{h(1), h(e)\} = \min\{0, e^{3-e} - 1\} = 0$ , 从而  $g(x) = a \cdot h(x) + \ln x > 0$ . 符合题意. ....8分

当  $a < 0$  时, 注意到  $g(1) = 0$ .

(i) 当  $0 < x < 1$  时,  $g(x) = ax^2e^{1-x} - \ln x - a$ , 且  $g'(x) = a(2x - x^2)e^{1-x} - \frac{1}{x} < 0$ , 则  $g(x)$  在单调递减, 有  $g(x) > g(1) = 0$ , 符合题意.

(ii) 当  $x \geq 1$  时,  $g(x) = ax^2e^{1-x} + \ln x - a$ , 且  $g'(x) = a(2x - x^2)e^{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{a}{x} [f(x) + \frac{1}{a}]$ .

若  $\frac{1}{a} > -1$ , 即  $a < -1$  时, 由 (1) 知  $f(x)$  在  $(0,2)$  单调递减, 且  $f(x) \in (0,1)$ . 存在  $x_1 \in (1,2)$ , 使得  $f(x_1) + \frac{1}{a} = 0$ , 当  $x \in (1, x_1)$  时,  $f(x) + \frac{1}{a} > 0$ , 且  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  单调递减, 可得  $g(x) < g(1) = 0$ , 不合题意.

若  $\frac{1}{a} \leq -1$ , 即  $-1 \leq a < 0$  时,  $g'(x) \geq 0$ , 则  $g(x)$  在  $[1, +\infty)$  单调递增, 有  $g(x) \geq g(1) = 0$ , 符合题意.

综上所述,  $a \in [-1,1]$  符合题意. ....12分

**方法 2 (先对自变量分段讨论, 再对参数分类讨论)**

① 当  $x = 1$  时,  $g(1) = 0$ , 符合题意.

② 当  $0 < x < 1$  时,  $g(x) = ax^2e^{1-x} - \ln x - a$ , 且

$g'(x) = a(2x - x^2)e^{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{a}{x} \left[ f(x) - \frac{1}{a} \right]$ . 由 (1) 知,  $f(x)$  在  $(0,1)$  单调递增, 且  $f(x) \in (0,1)$ .

若  $a < 0$  时,  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  在单调递减, 有  $g(x) > g(1) = 0$ , 符合题意.

若  $a = 0$  时,  $g(x) = -\ln x > 0$ , 符合题意.

若  $\frac{1}{a} \geq 1$ , 即  $0 < a \leq 1$  时,  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减, 有  $g(x) > g(1) = 0$ , 符合题意.

若  $0 < \frac{1}{a} < 1$ , 即  $a > 1$  时, 存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使得  $f(x_0) = \frac{1}{a}$ . 当  $x \in (x_0, 1)$  时,  $f(x) > \frac{1}{a}$ , 且  $g'(x) > 0$ , 则  $g(x)$  单调递增, 可得  $g(x) < g(1) = 0$ , 不合题意.

因此, 当  $0 < x < 1$  时, 满足题意的  $a \in (-\infty, 1]$ . .....8分

③ 当  $x > 1$  时,  $g(x) = ax^2e^{1-x} + \ln x - a$ , 且  $g'(x) = a(2x - x^2)e^{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{a}{x} \left[ f(x) + \frac{1}{a} \right]$ .

若  $\frac{1}{a} > -1$ , 即  $a < -1$  时, 由 (1) 知  $f(x)$  在  $(1,2)$  单调递减, 且  $f(x) \in (0,1)$ . 存在  $x_1 \in (1,2)$ , 使得  $f(x_1) + \frac{1}{a} = 0$ , 当  $x \in (1, x_1)$  时,  $f(x) + \frac{1}{a} > 0$ , 且  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  单调递减, 可得  $g(x) < g(1) = 0$ , 不合题意.

若  $\frac{1}{a} \leq -1$ , 即  $-1 \leq a < 0$  时,  $g'(x) > 0$ , 则  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  单调递增, 有  $g(x) > g(1) = 0$ , 符合题意.

若  $a = 0$  时,  $g(x) = \ln x > 0$ , 符合题意.

若  $0 < a \leq 1$  时, 当  $x \geq e$  时,  $g(x) > \ln x - a \geq \ln x - 1 \geq 0$ ; 当  $1 < x < e$  时, 设  $h(x) = x^2e^{1-x} - 1$ , 则  $h'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ , 可得  $h(x)$  在  $(1,2)$  单调递增, 在  $(2,e)$  单调递减, 有  $h(x) > \min\{h(1), h(e)\} = \min\{0, e^{3-e} - 1\} = 0$ , 从而  $g(x) = a \cdot h(x) + \ln x > 0$ . 符合题意.

若  $a > 1$  时, 结合情况②, 无需再讨论.

综上所述,  $a \in [-1, 1]$  符合题意. ....12分

说明 注意到  $g(1) = 0$ , 则  $g(x) \geq 0$  恒成立的必要条件为:  $g'(1) \leq 0$  ( $0 < x \leq 1$ ), 且  $g'(1) \geq 0$  ( $x \geq 1$ ).

当  $0 < x \leq 1$  时,  $g(x) = ax^2e^{1-x} - \ln x - a$ , 且  $g'(x) = a(2x - x^2)e^{1-x} - \frac{1}{x}$ , 则

$g'(1) = a - 1 \leq 0$ ，解得  $a \leq 1$ ；当  $x \geq 1$  时， $g(x) = ax^2e^{1-x} + \ln x - a$ ，且  
 $g'(x) = a(2x - x^2)e^{1-x} + \frac{1}{x}$ ，则  $g'(1) = a + 1 \geq 0$ ，解得  $a \geq -1$ 。从而，函数  $g(x) \geq 0$  恒成立  
只需限制参数  $a \in [-1, 1]$  中讨论。